פתרון מבחן אוקטובר 2013
חשיבה כמותית – פרק ראשון

1. אלכסון של ריבוע מחלק אותו לשני "משולשי בורקס" ואורכו שווה לאורך הצלע כפול $\sqrt{2}$ (ראו את התיאוריה בשורה האחרונה בעמוד האחרון של ספר "גיאומטריה והסקה מתרשים").
אם לא זוכרים, ניתן לחשב את אורך האלכסון לפי משפט פיתגורס (משפט 8 בתיאוריה של פרק המשולשים):

$$(\text{יתר}) = \sqrt{(\text{ניצב אחד})^2 + (\text{ניצב שני})^2} \quad \leftarrow \quad (\text{יתר})^2 = (\text{ניצב אחד})^2 + (\text{ניצב שני})^2$$

נתון שאורך כל צלע של הריבוע הקטן שווה x.

אורך האלכסון: $\text{האלכסון} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2} = \sqrt{2}\cdot x$

במקרה של הריבוע הקטן, GDEF, אורך האלכסון הוא $x\cdot\sqrt{2}$

במקרה של הריבוע הגדול, ABCD, אורך האלכסון הוא $2x\cdot\sqrt{2}$

נסכם את שני האלכסונים: $2x\cdot\sqrt{2} + x\cdot\sqrt{2} = 3x\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}x$

תשובה מספר (2) נכונה.

---

2. לפתרון מהיר, נעזר בתשובות:

(1) אם נתון ש- b גדול מ- a, אזי חלוקה של מספר כלשהו במספר קטן ממנו, תיתן מנה הגדולה מ-1.

לדוגמא: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

ניתן גם לפסול בעזרת דוגמאות פשוטות את 3 התשובות האחרות, ננסה למשל $b = \frac{1}{2}$ ו- $a = \frac{1}{4}$.

(2) $a\cdot b = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} < 1$

(3) $a^b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

(4) $a + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} < 1$

---

3. זוהי שאלה מתחום חוקי החזקות: לפי חוקי החזקות (ראו ספר "אלגברה ובעיות" בפרק חזקות, עקרון מספר 3 בחלק התיאורטי), העלאה בחזקה שמועלית שוב בחזקה, ניתן להכפיל את שני המעריכים, כאשר בסיס החזקה נותר קבוע:

$$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 3^2 = 9$$

תשובה מספר (4) נכונה.

---

4. נשתמש בשיטת ההצבה: נציב מספרים קלים, למשל: כמות הצוף בפרח צהוב היא 3, ובפרח אדום היא 2. נחשב לכל תשובה ונשווה ביניהן.

(1) $6 \cdot 3 = 18$

(2) $8 \cdot 2 = 16$

(3) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$

(4) $5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 15 + 4 = 19$

תשובה (4) נכונה.

5. כפי שלמדנו בפרק "משולשים" בספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", משפט 6 אומר: זווית חיצונית במשולש שווה לסכום שתי הזוויות שאינן צמודות אליה, לכן: $\angle CBD = 90^0 + \alpha$.

דרך אחרת:

למדנו כי סכום זוויות במשולש הוא 180^0, לכן: $\angle ABD + \alpha + 90^0 = 180^0$.

למדנו גם שסכום זוויות צמודות הוא 180^0, לכן: $\angle ABD + \angle CBD = 180^0$.

נשווה את שני האגפים השמאליים: $\angle ABD + \angle CBD = \angle ABD + \alpha + 90^0$

נחסר עכשיו משני האגפים את $\angle ABD$ ונקבל: $\angle CBD = \alpha + 90^0$.

תשובה מספר (3) נכונה.

---

6. זו שאלה מתחום בעיות ההספק, אבל ניתן לפתור בקלות רבה, אפילו ללא שימוש בנוסחאות:

אם רועי מספר 5 גברים בשעה בקצב קבוע, אז לוקח לו לספר גבר אחד $\frac{1}{5}$ של שעה, ושני גברים ייקח לו לספר $\frac{2}{5}$ של שעה, או 24 דקות. $\frac{2}{5} \cdot 60 = 24$

אם רועי מספר 3 נשים בשעה בקצב קבוע, אז לוקח לו לספר אשה אחת $\frac{1}{3}$ של שעה, ו-4 נשים ייקח לו לספר $\frac{4}{3}$ של שעה, כלומר שעה ושליש של שעה, או שעה ו- 20 דקות.

נסכם את הזמנים ונקבל: שעה ו-44 דקות.

תשובה מספר (4) נכונה.

---

7. $z = 40\% \cdot y$, $y = 60\% \cdot x$

נציב את y במשוואה השנייה: $z = 40\% \cdot (60\% \cdot x) = \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot x = \frac{4 \cdot 6}{1 \cdot 100} \cdot x = \frac{24}{100} \cdot x = 24\% \cdot x$

תשובה מספר (4) נכונה.

---

8. נניח שמחירו של עפרון הוא 1 ש"ח, אז מחירו של קלסר הוא 2 ש"ח.
נחשב את מחירן של 6 מחברות: $2\cdot 2+4\cdot 1=8$
מחירן של 3 מחברות הוא מחצית מזה, כלומר 4 ש"ח.
לפיכך מחירן של 9 מחברות הוא פי 3, כלומר 12 ש"ח. אם כל קלסר עולה 2 ש"ח, אז ב-12 ש"ח ניתן לקנות 6 קלסרים: $\frac{12}{2}=6$
תשובה מספר (3) נכונה.

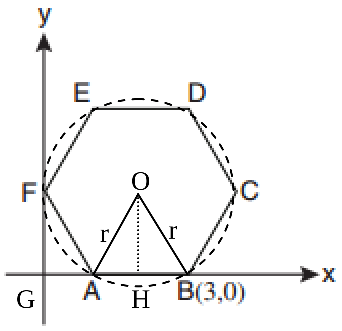
---

9. השאלה כאן משלבת את נושא הפעולה המוגדרת עם נושא המשוואות.
הפעולה המיוחדת $ היא מכפלה של שלושה גורמים, $x, (x-1), (x-2)$. כדי שמכפלה של כמה גורמים תהיה שווה אפס, מספיק שאחד מהגורמים יהיה שווה אפס (ראו בספר "אלגברה ובעיות", פרק "משוואות / אי-שיוויונים" נושא "6. משוואות אי-רציונליות", תרגיל 5).
כלומר, עבור <u>שלושה</u> ערכים שונים של x, יתקיים $\$(x)=0$.
נפרט: עבור $x=0$, עבור $(x-1)=0$ ← $x=1$ ועבור $(x-2)=0$ ← $x=2$.
תשובה (3) נכונה.

---

10. $\frac{a}{x}=\frac{21\cdot a}{x+5}$ נחלק את שני האגפים ב-a (מותר כי 0<a) ונקבל: $\frac{1}{x}=\frac{21}{x+5}$.
נכפיל בהצלבה: $21\cdot x=1\cdot(x+5)$, נפתח סוגריים: $21x=x+5$, נעביר את x לאגף שמאל: $20x=5$, נחלק את שני האגפים ב-20: $x=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$
תשובה (2) נכונה.
אגב, בשלב הפתרון הראשון כאשר a הצטמצם ויצא מן המשוואה, ניתן היה כבר לפסול את תשובות (1) ו-(4), ואז לנסות להציב את תשובה (2) או (3) ולבדוק האם המשוואה נכונה, במקום להמשיך ולפתור את המשוואה עד סופה. נדגים הצבת תשובה (3) x=5: $\frac{1}{5}=\frac{21}{5+5}$ וקל לראות ש $\frac{1}{5}\neq\frac{21}{10}$ ולכן תשובה (3) איננה נכונה ונותרנו עם תשובה (2) בלבד.

.11



הזכרנו בשיעורים שזווית פנימית של משושה משוכלל היא בת 120^0 (ראו ספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", פרק "מצולעים משוכללים", 3. משושה משוכלל: (2) זווית פנימית של המשושה), והישרים המחברים את מרכז המשושה (שהוא גם מרכז המעגל החוסם אותו) עם הקודקודים – יוצרים משולשים שהם שווי צלעות (ראו ספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", פרק "מצולעים משוכללים", 3. משושה משוכלל: (5) שטח המשושה).

כלומר רדיוס המעגל החוסם שווה לקטע AB.

הגובה OH המסומן במשולש ABO (שהוא גם תיכון), יוצר שני משולשים שווי שוקיים חופפים, וכל אחד מהם חופף

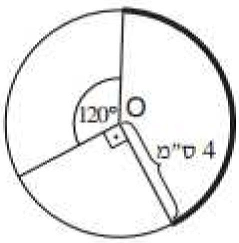
גם למשולש FGA (לפי משפט החפיפה, יש צלע ושתי זוויות, 90^0 ו- 60^0 ששווים בהתאמה).

נוצרו שלושה קטעים שווים: GA, AH, HB שסכומם הוא

3. (לפי מערכת הצירים, המרחק GB=3), כלומר אורכו של כל אחד מהם הוא 1. לכן אורך AB=2, וזה שווה לרדיוס (AB=OA=OB), כלומר r=2.

התשובה הנכונה היא (2).

.12



היקף כל המעגל הוא: $2\pi r = 2\cdot\pi\cdot 4 = 8\pi$. (ראו ספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", פרק "מעגל ועיגול", משפט 2. היקף המעגל)

למציאת הזווית המרכזית שנשענת על הקשת המודגשת, נחסיר מ-360^0 את

שתי הזוויות המרכזיות הנתונות: $360^0 - 120^0 - 90^0 = 150^0$

לכן חלקה של הקשת המודגשת מתוך כל ההיקף הוא: $\frac{150^0}{360^0}$

אורך הקשת: $\frac{150^0}{360^0}\cdot 8\pi = \frac{5}{12}\cdot 8\pi = \frac{10}{3}\pi$

או למי שזוכר, שישרות לפי הנוסחא (ראו ספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", פרק "מעגל ועיגול", משפט 4. אורך קשת בעלת רדיוס R וזווית מרכזית α^0): $l = \frac{\pi R\alpha^0}{180^0} = \frac{\pi\cdot 4\cdot 150^0}{180^0} = \frac{10}{3}\pi$

דרך אחרת: אם נזכור כי היקף כל מעגל הוא 360^0, ולכן 120^0 הם שליש מעגל, ו-90^0 הם רבע מעגל, החלק של המעגל שנותר הוא: $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = 1-\frac{4}{12}-\frac{3}{12} = \frac{5}{12}$ ואז: $\frac{5}{12}\cdot 8\pi = \frac{10}{3}\pi$

תשובה מספר (4) נכונה.

---

13. נניח לצורך הנוחות שיש בבית הספר 100 תלמידים. נחלק אותם ל-5 קבוצות (4+1). 20 אינם בעלי אופניים ו-80 בעלי אופניים. מתוך 80 בעלי האופניים, 30% הם בעלי אופני הרים, כלומר $24 = 80 \cdot \frac{30}{100}$.

אם 24 הם בעלי אופני הרים, שאר 76 התלמידים (100-24=76) אינם בעלי אופני הרים (יש להם אופניים אחרים או שהם אינם בעלי אופניים). 76 מתוך 100 הם 76%.
תשובה מספר (4) נכונה.

---

14. נסמן את תוצאות הזריקות: ראשונה=X, שנייה=Y, שלישית=Z. נרשום את הנתונים כך:

$\frac{X+Y+Z}{3}=4$ $\quad$ $\frac{X+Y}{2}=3$ $\quad$ $\frac{Y+Z}{2}=4$ נכפול כל משוואה במספר שבמכנה ונקבל:

$X+Y+Z=12$ $\quad$ $X+Y=6$ $\quad$ $Y+Z=8$.

נחבר את שתי המשוואות שמשמאל: $X+Y+Y+Z=6+8=14$. עכשיו אפשר לפתור בשתי שיטות:
(ראו ספר "אלגברה ובעיות", פרק "משוואות / אי-שיוויונים", "2. מערכת שתי משוואות ליניאריות עם שני נעלמים")

<u>שיטת החיבור האלגברי</u>:
נחסר את המשוואות זו מזו:

$$-\begin{cases} X+Y+Y+Z=14 \\ X+Y \quad\quad +Z=12 \end{cases}$$
$$Y \quad = 2$$

<u>שיטת ההצבה</u>:
עקב כך ש: $X+Y+Z=12$, נחליף את הסכום במספר

$X+Y+Y+Z=14 \leftarrow (X+Y+Z)+Y=14$

$\leftarrow 12+Y=14$

$\leftarrow Y=2$

התשובה הנכונה היא (2).

---

15. ניתן לפסול 3 תשובות בקלות ע"י מציאת דוגמא נגדית:

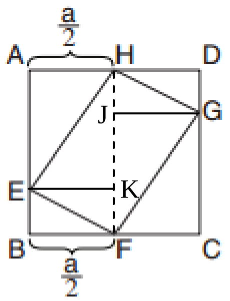
(4) x=2, y=0

(3) x=2, y=0

(2) x=2, y=0 (שניהם אינם <u>קטנים</u> מאפס)

(1) זו התשובה הנכונה. אם אחת משתי המכפלות ידוע שהיא חיובית, כי $(+)\cdot(+)=(+)$, אז כדי לקבל מספר חיובי (6) ייתכן להוסיף מספר חיובי או שלילי. במילים אחרות, לא ייתכן שגם x וגם y יהיו שליליים, כי אז שתי המכפלות תהיינה שליליות וסכומן לא ייתכן שיהיה 6, שהוא מספר חיובי.

16.



נעביר ישר בין H ל-F. ישר זה מקביל לצלע AB ולצלע CD. הוא גם מחלק את הריבוע ABCD לשני חלקים שווים.
נוריד שני גבהים אל הישר הזה, אחד מנקודה G אל J, ואחד מנקודה E אל K.
מכיוון שהם מאונכים לישר FH, הם מקבילים לצלע AD ולצלע BC, ושווים למחציתן. נוצרו עכשיו 4 משולשים חופפים: $DHG \cong JGH$, $FGJ \cong GFC$, $EFK \cong FEB$, $EHK \cong HEA$. משולשים חופפים שווים בשטחם. בכל הזוגות הללו, משולש אחד נמצא בתוך המרובע HEFG והמשולש השני מחוצה לו. לכן שטח המרובע HEFG שווה לשטח שמחוצה לו, כלומר שטח המרובע HEFG שווה למחצית שטח הריבוע ABCD: שטח הריבוע הוא a^2 , ומחציתו: $\frac{a^2}{2}$.
תשובה מספר (1) נכונה.

---

17. יש שלושה קווים שבהם אורכת הנסיעה 20 דקות. בין אתרים 2 ל-3, בין 3 ל-4, ובין 4 ל-8. בשניים מתוכם (2 ל-3 ו- 4 ל-8) המחיר הוא 10 שקלים (רקע כהה). $\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$.
תשובה מספר (4) נכונה.

---

18. האתרים שההפרש ביניהם הוא 4 הם: 1-5, 2-6, 3-7, 4-8. אלה המשבצות באלכסון שבתרשים. זמני הנסיעה הם: 50, 80, 90, ו-20. הממוצע הוא: $\frac{50+80+90+20}{4} = \frac{240}{4} = 60$.
תשובה מספר (2) נכונה.

---

19. אם מחיר הנסיעה הוא 10 שקלים הרקע של המשבצת הוא כהה. נבדוק את התשובות:
(1) אין משבצת כהה עם תדירות נסיעה נמוכה (נקודה אחת).
(2) אין משבצת כהה עם זמן נסיעה של 90 דקות.
(3) ייתכן. אם B הוא אתר 6 אז A הוא אתר 7.
(4) אין משבצת כהה באלכסון של 1-4, 2-5, 3-6, 4-7, 5-8.
תשובה מספר (3) נכונה.

---

20. המחיר של נסיעה מאחר 2 לאתר 5 הוא 7 שקלים (משבצת מקווקוות). העלאה ל-10 שקלים היא תוספת של 3 שקלים למחיר נסיעה בודדת. כמה נסיעות נוסעת נעמי בשבוע? פעמיים בכל יום, 6 פעמים בשבוע, כלומר 12 פעמים. $12 \cdot 3 = 36$. תוספת המחיר שתשלם נעמי היא 36 שקלים.
תשובה מספר (2) נכונה.
