

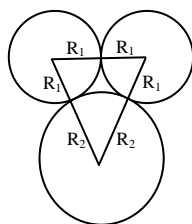
פתרון מבחן אוקטובר 2013
חשיבה כמותית – פרק שני

1. לצורך הפתרון יש לבדוק את התשובות עד שמגיעים לתשובה נכונה בוודאות או לפסול את 3 התשובות האחרות:

- (1) אם אמיר יכתוב 1, וגלית יכולה לכתוב 0 או 1, אז הסכום יהיה 1 או 2, ולא דווקא בוודאות 2.
 - (2) אם אמיר יכתוב 0, וגלית יכולה לכתוב 0 או 1, אז הסכום יהיה 0 או 1, ולכן יהיה בוודאות שונה מ-2.
 - (3) אם גלית תכתוב 1, ואמיר יכול לכתוב 0 או 1, אז הסכום יהיה 1 או 2, ולא דווקא בוודאות שונה מ-1.
 - (4) אם גלית תכתוב 0, ואמיר יכול לכתוב 0 או 1, אז הסכום יהיה 0 או 1, ולא דווקא בוודאות 1.
- תשובה (2) נכונה.
 תשובה מספר (4) נכונה.

2.

נסתכל על השרטוט הבא:

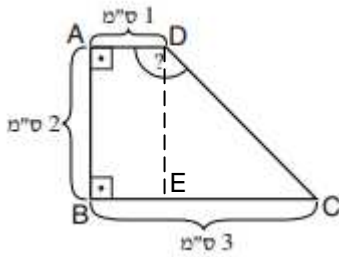


שתי הצלעות התחתונות של המשולש שוות: $R_1 + R_2 = R_1 + R_2$
 נתון ש: $R_1 \neq R_2$, לכן אורך הצלע העליונה שונה מאורכן, וזהו משולש שווה שוקיים.
 תשובה מספר (4) נכונה.

3. נציב את הנתונים בטבלה:

מעילים:	נעליים:	
0 עד 4 (נתון "פחות מ-5")	7 עד 13	חגית:
2 עד 8	0 עד 5 (נתון "פחות מ-6")	נועם:
2 עד 12 (2+0 עד 4+8)	7 עד 18 (7+0 עד 13+5)	ביחד:

למציאת מספר הנעליים והמעילים שיש להם ביחד, יש לחבר את המספרים המינימליים האפשריים, וזה יהיה המספר המינימלי ביחד, ולחבר את המספרים המקסימליים האפשריים, וזה יהיה המספר המקסימלי ביחד.
 תשובה מספר (1) נכונה.



נוריד אנך מנקודה D אל הצלע BC. זווית E היא זווית ישרה ולכן מרובע ABDE הינו מלבן.

החלק של זווית D שבתוך המלבן הוא כמובן 90° .

אם ABDE הוא מלבן, אז הצלעות הנגדיות שוות

$$AB = DE = 2 \text{ cm}, \quad AD = BE = 1 \text{ cm} \quad \text{מכאן:}$$

$$CE = 3 - 1 = 2 = DE$$

כלומר משולש CDE הוא משולש שווה שוקיים וישר זווית

("משולש בורקס"), וזוויות הבסיס הן שוות וגודלן 45° .

החלק של זווית D שנמצא במשולש הוא 45° ולכן כל זווית D

$$\angle ADC \text{ הוא: } 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

תשובה מספר (3) נכונה.

כפי שלמדנו בפרק "משולשים" בספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", משפט 6 אומר: זווית חיצונית

במשולש שווה לסכום שתי הזוויות שאינן צמודות אליה, לכן: $\angle CBD = 90^\circ + \alpha$.

דרך אחרת:

$$\angle ABD + \alpha + 90^\circ = 180^\circ \quad \text{לכן: } \angle ABD + \alpha = 90^\circ$$

$$\angle ABD + \angle CBD = 180^\circ \quad \text{לכן: } \angle CBD = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle ABD + \angle CBD = \angle ABD + \alpha + 90^\circ$$

$$\angle CBD = \alpha + 90^\circ \quad \text{ונקבל: } \angle ABD$$

תשובה מספר (3) נכונה.

5. כפי שלמדנו בפרק "סדרות חשבוניות והנדסיות" בספר "אלגברה ובעיות", זוהי סדרה הנדסית (לאחר

דקה אחת יש שני חיידקים, לאחר 2 דקות יש 4 חיידקים, לאחר 3 דקות יש 8 חיידקים, וכן הלאה).

אם כל דקה חולפת מספר החיידקים מוכפל, אז קבוע הסדרה הוא: $q=2$. ונתון: $a_0=1, a_n=64$. (שימו

לב כי חיידק אחד היה בזמן "אפס" לפני הדקה הראשונה, $a_1=2$). נציב בנוסחא: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$64 = 2 \cdot 2^{n-1} \leftarrow 32 = 2^{n-1} \leftarrow 2^5 = 2^{n-1} \leftarrow 5 = n-1 \leftarrow n = 6$$

דרך אחרת:

מכיוון שמספר האיברים אינו גדול, ניתן לחשב איבר-איבר:

6	5	4	3	2	1	הזמן שחלף בדקות:
64	32	16	8	4	2	מספר החיידקים:

תשובה מספר (1) נכונה.

6. כדי לפתור את האי-שוויון, צריך להכפיל את שני האגפים במספר 1-, שהוא מספר שלילי. לפי התיאוריה בפרק "משוואות ואי שוויונים" בספר "אלגברה ובעיות", תכונה מספר 3, "ניתן להכפיל את שני האגפים באותו מספר... במידה והמספר שלילי יש להחליף את סימן האי-שוויון בסימן הנגדי."

$$(-1) \cdot (-3x^2 \leq -27) \rightarrow 3x^2 \geq 27$$

$$/ : 3$$

$$x^2 \geq 9$$

נבדוק את התשובות: רק תשובה מספר (1) איננה מקיימת את האי-שוויון ולכן היא נכונה. דרך אחרת היא להציב ישר לאי-שוויון המקורי:

$$(1) \quad -3 \cdot (-1)^2 \leq -27 \leftarrow -3 \cdot (+1) \leq -27 \leftarrow -3 \leq -27 \quad \text{זוה אינו נכון, לכן התשובה נכונה.}$$

ניתן כבר לסמן את תשובה (1), אבל נבדוק בכל זאת את התשובות האחרות:

$$(2) \quad -3 \cdot (-5)^2 \leq -27 \leftarrow -3 \cdot (+25) \leq -27 \leftarrow -75 \leq -27 \quad \text{זוה נכון, לכן התשובה איננה נכונה.}$$

$$(3) \quad -3 \cdot (3)^2 \leq -27 \leftarrow -3 \cdot (9) \leq -27 \leftarrow -27 \leq -27 \quad \text{זוה נכון, לכן התשובה איננה נכונה.}$$

$$(4) \quad -3 \cdot (100)^2 \leq -27 \leftarrow -3 \cdot (10000) \leq -27 \leftarrow -30000 \leq -27 \quad \text{זוה נכון, לכן התשובה איננה נכונה.}$$

7. $M+18$ ניתן להפרדה, כך שגם M וגם 18 חייבים שיתחלקו, כל אחד מהם בנפרד, במחלק המשותף (ללא שארית). ברור מהאפשרויות שרק 12 (תשובה מספר 2), איננה יכולה להתקיים כי 12 איננו מחלק של 18. דרך אחרת: ניתן להציב דוגמא, למשל $M=18$, ולבדוק: $18+18=36$ מתחלק בכל התשובות. אז נציב דוגמא אחרת, למשל $M=36$. נבדוק: $36+18=54$ מתחלק בכולם, מלבד ב-12. תשובה מספר (2) נכונה.

8. אם $BD = \frac{2}{3} BC$, אז $DC = \frac{1}{3} BC$, כלומר היחס בין BD ל- DC הוא 2:1 $\left(\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}\right)$

לפי התיאוריה שלמדנו בספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", בפרק "שטחי מצולעים", "שטח משולש"

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \quad \text{מסקנה 3: אם הצלע מחולקת ביחס 2:1, אז שטח המשולשים יהיה באותו יחס, כלומר:}$$

אם נתון ששטח משולש ADC הוא 18 סמ"ר, אז שטח משולש ABD יהיה כפול, כלומר 36 סמ"ר. דרך ארוכה יותר היא חישוב לפי שטחי משולשים:

נסמן את הגובה בתור h ואת אורך DC בתור X . מצאנו שאורך BD הוא $2X$.

$$\text{שטח משולש } ADC: S_{ADC} = 18 = \frac{1}{2} X \cdot h \leftarrow 36 = X \cdot h$$

$$\text{שטח משולש } ABD: S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 2X \cdot h = X \cdot h = 36$$

תשובה מספר (4) נכונה.

9. הטבלה דומה בעקרון שלה לתרשים מספר 5 בספר "גיאומטריה והסקה מתרשים". יש לסכם את המספרים בכל שורה אופקית. אין צורך ממש להגיע לתשובה מדוייקת, מספיק להעריך האם הסכום הוא גדול או קטן מ-20. ניתן לראות כי רק למשתתפים B, C, G, ו-J סכום הניקוד שהם קיבלו קטן מ-20, ולכן תשובה (4) נכונה.

10. נחפש מי מהמשתתפים קיבל 0 בנושא תיאטרון. יש ארבעה אפסים בטור של תיאטרון, 3 הם גברים (E, C, A)

$$\text{ואשה אחת (J)}. \text{ הסיכוי בבחירה אקראית לבחור גבר} : \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} = \frac{\text{מספר הגברים}}{\text{כל הקבוצה}} = \frac{\text{הסיכוי לבחור גבר}}{\text{לבחור גבר}}.$$

תשובה (4) נכונה.

11. למציאת "ניקוד הסף" בנושא מוסיקה, נבחר מספר מתוך טור המוסיקה, בערך באמצע, ונבדוק כמה יש שווים לו או מעליו וכמה קטנים ממנו. עדיף להתחיל עם מספר שמופיע בתשובות, ואינו קיצוני (5 ו-9), למשל 6 או 7. נתחיל עם 6 : 8 ניקודים הם 6 או גבוהים ממנו (8,9,10) ורק 4 ניקודים נמוכים מ-6. אז נפסול את 5 ו-6 ונעלה לבדוק את 7 : 6 ניקודים גבוהים מ-7 (8, 9, 9, 8, 8, 10), 6 ניקודים נמוכים מ-7 (3, 6, 6, 2, 1, 2). זהו "ניקוד הסף".
התשובה הנכונה היא (3).

12. נבדוק עבור כל אחת מהתשובות : L, K, I, H :

H : הניקוד שלה בנושא טכנולוגיה (-2) איננו הגבוה ביותר.

I : הניקוד שלה בנושא טכנולוגיה (-1) כבר איננו הגבוה ביותר.

K : הניקוד שלה בכל הנושאים הוא הגבוה ביותר.

L : הניקוד שלה בנושא אקטואליה (-3) איננו הגבוה ביותר.

תשובה מספר (3) נכונה.

13. ניתן לפתור או להציב תשובות.

דרך אלגברית: לנדב X קלפים, לעמית Y קלפים. נתון: $X + Y = 105$

$$\frac{3}{4}X = Y \quad \leftarrow \quad \frac{3}{4}X - Y = 0 \quad \leftarrow \quad X - Y = \frac{1}{4}X$$

(ראו ספר "אלגברה ובעיות", פרק "משוואות / אי-שוויונים", "2. מערכת שתי משוואות ליניאריות עם שני נעלמים")

<p style="text-align: center;"><u>שיטת ההצבה:</u></p> <p>נציב את $Y = \frac{3}{4}X$, במשוואה הראשונה: $X + \frac{3}{4}X = 105$</p> $\frac{7}{4}X = 105 \quad \leftarrow$ $X = 105 \cdot \frac{4}{7} = 15 \cdot 4 = 60 \quad \leftarrow$	<p style="text-align: center;"><u>שיטת החיבור האלגברי:</u></p> $\begin{array}{r} X + Y = 105 \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}X - Y = 0 \end{array} \right. \\ \hline \frac{7}{4}X = 105 \\ X = 105 \cdot \frac{4}{7} = 15 \cdot 4 = 60 \quad \leftarrow \end{array}$
---	---

דרך פסיכומטרית: ננסה להציב את התשובות.

תשובה (1) ו-(2) נפסלות מיד כי אם נשלים את מספר הקלפים של נדב שבתשובות (45 או 47) לסכום של 105, יוצא שלעמית יש מעל 50 קלפים, כלומר יותר מאשר לנדב, וזה סותר את התנאי שלנדב יהיו יותר קלפים. נותר לנו לבדוק 58 או 60. ננסה תחילה את המספר הקל יותר לחלוקה בארבע – 60. אם לנדב יש 60, לעמית נותרים 45 קלפים ($105 - 60 = 45$). ההפרש הוא 15, שזה באמת רבע של 60. לכן 60 הוא מספר הקלפים שיש לנדב.

תשובה מספר (4) נכונה.

14. תחילה נפתח את הערך המוחלט הפנימי יותר ($|-2|$), (התיאוריה מפורטת בספר "אלגברה ובעיות", בפרק "ערך מוחלט".

ונמשיך:

$$\frac{||-2|-6|}{-5} - 3 = \frac{|2-6|}{-5} - 3 = \frac{|-4|}{-5} - 3 = \frac{4}{-5} - 3 = -\frac{4}{5} - 3 = \frac{-4}{5} - \frac{15}{5} = \frac{-19}{5} = -\frac{19}{5}$$

התשובה הנכונה היא (4).

15. מספר דו-ספרתי XY ניתן לכתוב: $10X + Y$. (ראו ספר "אלגברה ובעיות", פרק "בעיות באותיות")

נפתח את המספרים הדו-ספרתיים שבמונה:

$$\frac{AB + BC + CA}{A + B + C} = \frac{10A + B + 10B + C + 10C + A}{A + B + C} = \frac{11A + 11B + 11C}{A + B + C} = \frac{11(A + B + C)}{A + B + C} = 11$$

תשובה מספר (1) נכונה.

16. השאלה היא בנושא בעיות יחס. (ראו ספר "אלגברה ובעיות", פרק "בעיות יחס")
 אם לפי הנתונים, להכנת תערובת של סוכר וקמח משתמשים ב-1 ק"ג סוכר וב-3 ק"ג קמח, הרי שמתקבלת תערובת סוכר וקמח שמשקלה 4 ק"ג. אם לכל 1 ק"ג של תערובת כזו יש להוסיף 1 ליטר מים, הרי של-4 ק"ג תערובת נוסיף 4 ליטר (שהם 4 ק"ג) מים ונקבל 8 ק"ג בצק ($4 + 4 = 8$). כזכור, השתמשנו ב-3 ק"ג קמח. תשובה מספר (3) נכונה.

17. היקף הריבוע הוא $4a$. היקף המשולש הוא $a + 2b$. אם נתון ש $1.5a < b$, אז אפשר לכפול ב-2 ולקבל $3a < 2b$. היקף המשולש הוא a ועוד משהו ($2b$) שגדול מ- $3a$, כלומר גדול מ- $4a$ שזה היקף הריבוע. כלומר, היקף המשולש גדול מהיקף הריבוע. תשובה מספר (2) נכונה.

18. זוהי שאלה בנושא הסתברות. ראה הסבר מפורט בספר "אלגברה ובעיות", פרק "בעיות הסתברות".
 האפשרות שסכום המספרים של שתי הטלות המטבע יהיה גדול מהמספר בקוביה היא רק אם בשתי הטלות המטבע יתקבל המספר 1 (הסכום הוא 2), ובקוביה יתקבל 1. כל אפשרות אחרת בקוביה תהיה גדולה או שווה לסכום הטלות המטבע. כל אפשרות אחרת בהטלות המטבע יביא לסכום של 0 או 1, שאינו יכול להיות גדול מהמספר בקוביה. לפיכך, השאלה היא בעצם: מה הסיכוי שבהטלת המטבע הראשונה יתקבל 1, וגם בהטלת המטבע השנייה יתקבל 1, וגם בקוביה יתקבל 1.

כדי לחשב הסתברות משותפת של שלושת המאורעות, יש להכפיל את ההסתברות של כל אירוע נפרד (ראה פרק "בעיות הסתברות", משפט 1)
 נחשב תחילה כל סיכוי (הסתברות) בנפרד:

$$\text{כזכור: מספר כל המאורעות} = \frac{\text{מספר המאורעות הרצוי}}{\text{מספר כל המאורעות האפשריים}} = \text{הסתברות}$$

$$\frac{1}{2} : \text{ההסתברות שהמטבע ייפול בהטלה הראשונה על המספר 1}$$

$$\frac{1}{2} : \text{ההסתברות שהמטבע ייפול בהטלה השנייה על המספר 1}$$

$$\frac{1}{6} : \text{ההסתברות שהקוביה תיפול על המספר 1}$$

$$\text{נכפול עכשיו את ההסתברויות של כל שלושת המאורעות: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

המאורעות יקרו במשותף. תשובה מספר (1) נכונה.

19. שאלה זו דומה לדוגמא מספר 4 (כוסות בצורת גליל בתוך קופסא בצורת תיבה) בספר "גיאומטריה והסקה מתרשים", פרק "הנדסת המרחב".
 כדי שגליל ייכנס לתיבה, התיבה צריכה להיות ברוחב ובאורך של קוטר הגליל (פעמיים הרדיוס) ובגובה של הגליל. לכן גליל אחד יתפוס "נפח תיבתי" של 4×4 כפול הגובה (10) כלומר 160 סמ"ק. שני גלילים יתפסו פעמיים את אותו הנפח, כלומר 320 סמ"ק. תשובה מספר (3) נכונה.

20. השאלה היא בנושא נוסחאות הכפל המקוצר שנלמד בפרק "ביטויים ומספרים" בספר "אלגברה ובעיות".

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + (a+b)^2}{2ab} - 1 &= \frac{a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2}{2ab} - 1 = \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2}{2ab} - 1 = \frac{2 \cdot (a^2 + ab + b^2)}{2ab} - 1 \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} - \frac{ab}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a \cdot a}{ab} + \frac{b \cdot b}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

תשובה מספר (1) נכונה.